

Definiție

O **funcție** este un triplet (A, B, R) , unde A și B sunt mulțimi, iar $R \subseteq A \times B$ este o relație cu proprietatea că pentru orice $a \in A$ există un unic $b \in B$ cu $(a, b) \in R$.

Vom nota o funcție (A, B, R) prin $f : A \rightarrow B$, simbolul f având următoarea semnificație: fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un singur element $f(x) \in B$ a.î. $(x, f(x)) \in R$.

Spunem că $f : A \rightarrow B$ este **definită pe A cu valori în B** , A se numește **domeniul de definiție** al funcției f și B se numește **domeniul valorilor** lui f .

Notație: B^A este mulțimea funcțiilor de la A la B .

Definiție

O **funcție parțială** de la A la B este o funcție $f : C \rightarrow B$, unde C este o submulțime a lui A .

Notații: Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție, $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$.

- ▶ $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este **imaginea directă** a lui X prin f ; $f(A)$ este **imaginea** lui f .
- ▶ $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ este **imaginea inversă** a lui Y prin f .

Definiție

Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție

- ▶ f este **injectivă** dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$).
- ▶ f este **surjectivă** dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ a.î. $f(x) = y$ (sau, echivalent, $f(A) = B$).
- ▶ f este **bijectivă** dacă f este injectivă și surjectivă.

Fie $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$ două funcții. **Compunerea** lor $g \circ f$ este definită astfel:

$$g \circ f : A \rightarrow C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru orice } x \in A.$$

Funcția identică a lui A : $1_A : A \rightarrow A$, $1_A(x) = x$.

Definiție

O funcție $f : A \rightarrow B$ este **inversabilă** dacă există $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$.

Exercițiu. O funcție este bijectivă ddacă este inversabilă.

Definiție

Spunem că A este **echipotentă** cu B dacă există o bijecție $f : A \rightarrow B$. **Notăție:** $A \sim B$.

Exercițiu. A este echipotentă cu B ddacă B este echipotentă cu A . De aceea, spunem de obicei că A și B sunt echipotente.



Funcția caracteristică

Definiție

Fie A, T mulțimi a.î. $A \subseteq T$. **Funcția caracteristică** a lui A în raport cu T este definită astfel:

$$\chi_A : T \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A \\ 0, & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

Proprietăți

Dacă $A, B \subseteq T$ și $x \in T$ atunci

$$\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$$

$$\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$$

$$\chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

Observație

Funcția caracteristică se poate folosi pentru a arăta că două mulțimi sunt egale: $A = B$ ddacă $\chi_A = \chi_B$.

Fie I o mulțime nevidă.

Fie A o mulțime. O **familie** de elemente din A indexată de I este o funcție $f : I \rightarrow A$. Notăm cu $(a_i)_{i \in I}$ familia $f : I \rightarrow A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$. Vom scrie și $(a_i)_i$ sau (a_i) atunci când I este dedusă din context.

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulțime A_i , obținem o **familie (indexată) de mulțimi** $(A_i)_{i \in I}$.

Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de submulțimi ale unei mulțimi T . Reuniunea și intersecția familiei $(A_i)_{i \in I}$ sunt definite astfel:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid \text{există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}$$



Produsul cartezian al unei familii

Fie I o mulțime nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi.

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i \in I}$ se definește astfel:

$$\begin{aligned}\prod_{i \in I} A_i &= \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \right\} \\ &= \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}.\end{aligned}$$

Pentru orice $j \in I$, aplicația $\pi_j : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j$, $\pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$ se numește **proiecție canonică** a lui $\prod_{i \in I} A_i$. π_j este surjectivă.

Exercițiu. Fie I, J mulțimi nevide. Atunci

$$\bigcup_{i \in I} A_i \times \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j \text{ și } \bigcap_{i \in I} A_i \times \bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j.$$


$$I = \{1, \dots, n\}$$

Fie n număr natural, $n \geq 1$, $I = \{1, \dots, n\}$ și $A_1, \dots, A_n \subseteq T$.

▶ $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \dots, x_n)$, un n -tuplu (ordonat)

▶ $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$ și $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^n A_i$

▶ $\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times \dots \times A_n$ și $A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_n$

Definiție

O relație n -ară între A_1, \dots, A_n este o submulțime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^n A_i$.

O relație n -ară pe A este o submulțime a lui A^n . Dacă R este relație n -ară, spunem că n este aritatea lui R .

Principiul bunei ordonări

Orice submulțime nevidă a lui \mathbb{N} are un cel mai mic element.

Principiul inducției

Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ astfel încât:

- (i) $0 \in S$ și
- (ii) pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dacă $n \in S$, atunci $n + 1 \in S$.

Atunci $S = \mathbb{N}$.

Dem.: Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ a.î. (i) și (ii) sunt adevărate. Presupunem că $S \neq \mathbb{N}$, deci $\mathbb{N} \setminus S \neq \emptyset$. Fie n_0 cel mai mic element din $\mathbb{N} \setminus S$. Din (i) rezultă că $n_0 \neq 0$. Deoarece $n_0 - 1 \in S$, din (ii) rezultă că $n_0 \in S$. Am obținut o contradicție. Prin urmare, $S = \mathbb{N}$. □

Observație

Principiul bunei ordonări și principiul inducției sunt echivalente.

Principiul inducției (forma tare)

Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ astfel încât:

(i) $0 \in S$ și

(ii) pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dacă $\{0, 1, \dots, n\} \subseteq S$, atunci $n + 1 \in S$.

Atunci $S = \mathbb{N}$.

Dem.: Aplicăm Principiul inducției pentru

$$S' = \{n \in \mathbb{N} \mid \{0, \dots, n\} \subseteq S\}.$$

Obținem $S' = \mathbb{N}$. Rezultă că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\{0, \dots, n\} \subseteq S$, deci $n \in S$. Prin urmare, $S = \mathbb{N}$. □



Principiul inducției

Fie $P : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ un predicat (o proprietate). $P(n) = 1$ înseamnă că $P(n)$ este adevărat.

Principiul inducției

- ▶ Pasul inițial. Verificăm că $P(0) = 1$.
- ▶ Ipoteza de inducție. Presupunem că $P(n) = 1$, unde $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ Pasul de inducție. Demonstrăm că $P(n+1) = 1$.

Concluzie: $P(n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Principiul inducției (forma tare)

- ▶ Pasul inițial. Verificăm că $P(0) = 1$.
- ▶ Ipoteza de inducție. Presupunem că $P(k) = 1$ pentru orice $k \leq n$, unde $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ Pasul de inducție. Demonstrăm că $P(n+1) = 1$.

Concluzie: $P(n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Definiție

O mulțime A este **numărabilă** dacă este echipotentă cu \mathbb{N} .

O mulțime finită sau numărabilă se numește **cel mult numărabilă**.

Propoziție

- (i) Orice submulțime infinită a lui \mathbb{N} este numărabilă.
- (ii) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi numărabile este mulțime numărabilă.
- (iii) \mathbb{Z} și \mathbb{Q} sunt numărabile.
- (iv) Produsul cartezian al unei familii cel mult numărabile de mulțimi numărabile este mulțime numărabilă.

Dem.: Exercițiu.