Principiul diagonalizării

Principiul diagonalizării

Fie R o relație binară pe o mulțime A și $D \subseteq A$ definită astfel:

$$D = \{x \in A \mid (x,x) \notin R\}.$$

Pentru orice $a \in A$, definim

$$R_a = \{x \in A \mid (a,x) \in R\}.$$

Atunci D este diferit de fiecare R_a.

Dem.: Presupunem că există $a \in A$ astfel încât $D = R_a$. Sunt posibile două cazuri:

- $a \in D$. Rezultă că $(a,a) \notin R$, deci $a \notin R_a = D$. Contradicție.
- $a \notin D$. Rezultă că $(a,a) \in R$, deci $a \in R_a = D$. Contradicție.

Prin urmare, $D \neq R_a$ pentru orice $a \in A$. □

Argumentul diagonal al lui Cantor

Teoremă Cantor

Nu există o bijecție între $\mathbb{N}$ și mulțimea $2^{\mathbb{N}}$ a părților lui $\mathbb{N}$, deci $2^{\mathbb{N}}$ nu este mulțime numărabilă.

Dem.: Presupunem că există o bijecție $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$. Prin urmare, $2^{\mathbb{N}}$ poate fi enumerată ca $2^{\mathbb{N}} = \{S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots,\}$, unde $S_i = f(i)$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Considerăm relația binară $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definită astfel:

$$R = \{(i,j) \mid j \in f(i)\} = \{(i,j) \mid j \in S_i\}$$

și aplicăm Principiul diagonalizării. Astfel,

$$\begin{aligned} D &= \{n \in \mathbb{N} \mid (n,n) \notin R\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S_n\}, \\ R_i &= \{j \in \mathbb{N} \mid (i,j) \in R\} = \{j \in \mathbb{N} \mid j \in S_i\} = S_i, \quad i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Deoarece $D \subseteq \mathbb{N}$ și f este bijecție, există $k \in \mathbb{N}$ a.î. $D = f(k) = S_k = R_k$. Pe de altă parte, conform Principiului diagonalizării, $D \neq R_i$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Am obținut o contradicție. □

Relații binare

Fie A o mulțime nevidă și $R \subseteq A^2$ o relație binară pe A.
Notație: Scriem xRy în loc de $(x,y) \in R$ și $\neg(xRy)$ în loc de $(x,y) \notin R$.

Definiție

- R este reflexivă dacă xRx pentru orice $x \in A$.
- R este ireflexivă dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.
- R este simetrică dacă pentru orice $x,y \in A$, xRy implică yRx.
- R este antisimetrică dacă pentru orice $x,y \in A$,
  $$xRy \text{ și } yRx \text{ implică } x = y.$$
- R este tranzitivă dacă pentru orice $x,y,z \in A$,
  $$xRy \text{ și } yRz \text{ implică } xRz.$$
- R este totală dacă pentru orice $x,y \in A$, xRy sau yRx.

Relații de echivalență

Definiție

Fie A o mulțime nevidă. O relație binară $R \subseteq A^2$ se numește relație de echivalență dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Exemple

- Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Definim relația $\equiv (\text{mod } n) \subseteq \mathbb{Z}^2$ astfel:
  $$\equiv (\text{mod } n) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \text{ divide } (x-y)\}.$$
  Relația $\equiv (\text{mod } n)$ se numește congruența modulo n. Folosim notația $x \equiv y (\text{mod } n)$ pentru $(x,y) \in \equiv (\text{mod } n)$.
- Fie $f : A \to B$ o funcție. Definim relația $\ker f \subseteq A^2$ astfel:
  $$\ker f = \{(a_1,a_2) \in A^2 \mid f(a_1) = f(a_2)\}.$$
  $\ker f$ se numește și nucleul lui f.

Notații: Vom nota relațiile de echivalență cu $\sim$. Scriem $x \sim y$ dacă $(x,y) \in \sim$ și $x \not\sim y$ dacă $(x,y) \notin \sim$.

Relații de echivalență

Fie A o mulțime nevidă și $\sim \subseteq A^2$ o relație de echivalență.

Definiție

Pentru orice $x \in A$, clasa de echivalență $[x]$ a lui x este definită astfel: $[x] = \{y \in A \mid x \sim y\}$.

Propoziție

- $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.
- $[x] = [y]$ ddacă $x \sim y$.
- $[x] \cap [y] = \emptyset$ ddacă $x \not\sim y$ ddacă $[x] \neq [y]$.

Dem.: Exercițiu.

Definiție

Mulțimea tuturor claselor de echivalență distincte ale elementelor lui A se numeșt mulțimea cât a lui A prin $\sim$ și se notează $A/\sim$. Aplicația $\pi : A \to A/\sim$, $\pi(x) = [x]$ se numește funcția cât.

Relații de echivalență

Fie A o mulțime nevidă și $\sim \subseteq A^2$ o relație de echivalență.

Definiție

Un sistem de reprezentanți pentru $\sim$ este o submulțime $X \subseteq A$ care satisface: pentru orice $a \in A$ există un unic $x \in X$ a.î. $a \sim x$.

Propoziție

Fie X un sistem de reprezentanți pentru $\sim$. Atunci $A = \bigcup_{x \in X} [x]$ și $A/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$.

Dem.: Exercițiu.

Exemplu

Considerăm congruența modulo 2, $\equiv (\text{mod } 2)$:
$[0] = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$, $[1] = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}+1$;
$[2n] = [0]$ și $[2n+1] = [1]$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$; mulțimea cât este $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$. Sisteme de reprezentanți: $X = \{0, 1\}$, $X = \{2, 5\}$, $X = \{999, 20\}$.

Partiții

Fie A o mulțime nevidă.

Definiție

O partiție a lui A este o familie $(A_i)_{i \in I}$ de submulțimi nevide ale lui A care verifică proprietățile:

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ și } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pentru orice } i \neq j.$$

Partiția $(A_i)_{i \in I}$ se numește finită dacă I este finită.

Propoziție

Există o bijecție între mulțimea relațiilor de echivalență pe A si mulțimea partițiilor lui A:

- $(A_i)_{i \in I}$ partiție a lui $A \mapsto$ relația de echivalență pe A definită prin: $x \sim y$ ddacă există $i \in I$ a.î. $x, y \in A_i$.
- $\sim$ relație de echivalență pe $A \mapsto$ partiția $([x])_{x \in X}$, unde $X \subseteq A$ este un sistem de reprezentanți pentru $\sim$.

Dem.: Exercițiu.