FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Examen

(P1) [1 punct] Fie funcţia $J : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ ce verifică, pentru orice $x, y, z \in \{0,1\}$:

$$J(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x = y \cdot z.$$

Să se obţină o formulă a logicii propoziţionale φ în FNC astfel încât $J = F_\varphi$.

Demonstraţie: Alcătuim tabelul de valori al lui J.

ε_0	ε_1	ε_2	$J(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Obţinem, aşadar, uitându-ne pe liniile cu 0 de pe coloana valorilor lui J şi apoi aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 1.73 şi 1.74, obţinem că un exemplu de φ este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee \neg v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

$\square$

(P2) [2 puncte] Fie $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$, definite, pentru orice $i \in \mathbb{N}$, prin:

$$e_1(v_i) = 1 \Leftrightarrow i \text{ este prim},$$

$$e_2(v_i) = 1 \Leftrightarrow i \text{ este par}.$$

Să se găsească $\Gamma \subseteq Form$ astfel încât $Mod(\Gamma) = \{e_1, e_2\}$.

Demonstraţie: Rezolvăm problema pentru $Mod(\Gamma) = \{e_1, ..., e_n\}$, unde $e_1, ..., e_n$ sunt arbitrare şi distincte.
Pentru orice $m \geq 1$, definim, folosind notaţiile din Cursul 7, φ_m ca fiind:

$$\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} v_j^{e_i}.$$

Notăm $\Gamma := \{\varphi_m \mid m \geq 1\}$. Vrem $Mod(\Gamma) = \{e_1, ..., e_n\}$.
Pentru orice $i \neq j$, notăm $l_{ij} := \min\{k \mid e_i(v_k) \neq e_j(v_k)\}$ şi $l := \max\{l_{ij} \mid i \neq j\}$.
Demonstrăm incluziunea "$\subseteq$". Fie $e : V \to \{0, 1\}$ cu $e \vDash \Gamma$. Atunci $e \vDash \varphi_l$ şi deci:

$$\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{l} e^+(v_j^{e_i}) = 1$$

şi deci există un $i_0 \in \{1, ..., n\}$ cu $\bigwedge_{j=1}^{l} e^+(v_j^{e_{i_0}}) = 1$, de unde scoatem că pentru orice $j \in \{1, ..., l\}$ avem $e^+(v_j^{e_{i_0}}) = 1 = e_{i_0}^+(v_j^{e_{i_0}})$, i.e. pentru orice $j \in \{1, ..., l\}$ avem $e(v_j) = e_{i_0}(v_j)$ (*).
Vrem $e = e_{i_0}$, i.e. că şi pentru un $p > l$ avem $e(v_p) = e_{i_0}(v_p)$. Fie $p > l$.
Cum $e \vDash \varphi_p$, avem că

$$\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{p} e^+(v_j^{e_i}) = 1,$$

de unde scoatem, similar, că există un $i_1 \in \{1, ..., n\}$ astfel încât pentru orice $j \in \{1, ..., p\}$ avem $e(v_j) = e_{i_1}(v_j)$ (**).
Presupunem că $i_0 \neq i_1$. Atunci, din definiţia lui $l_{i_0 i_1}$, avem $l_{i_0 i_1} \leq l < p$ şi $e_{i_0}(v_{l_{i_0 i_1}}) \neq e_{i_1}(v_{l_{i_0 i_1}})$ (***).
Din (*), avem atunci $e_{i_0}(v_{l_{i_0 i_1}}) = e(v_{l_{i_0 i_1}})$, iar din (**), avem $e_{i_1}(v_{l_{i_0 i_1}}) = e(v_{l_{i_0 i_1}})$, ceea ce contrazice (***).
Deci $i_0 = i_1$, iar din (**) obţin $e(v_p) = e_{i_1}(v_p) = e_{i_0}(v_p)$.
Demonstrăm incluziunea "$\supseteq$". Fie $i' \in \{1, ..., n\}$. Vrem $e_{i'} \vDash \Gamma$, i.e. pentru orice $m \geq 1$, $e_{i'} \vDash \varphi_m$. Fie $m \geq 1$.
Avem:

$$e_{i'}^+(\varphi_m) = e_{i'}^+(\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} v_j^{e_i}) = \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} e_{i'}^+(v_j^{e_i}) \geq \bigwedge_{j=1}^{m} e_{i'}^+(v_j^{e_{i'}}) = 1.$$

□

(P3) [2 puncte] Să se ofere un exemplu justificat de mulţime infinită de formule din logica propoziţională a cărei mulţime de modele să fie nenumărabilă.

Demonstraţie: Iau mulţimea $\Gamma = \{v_{2k} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Clar, Γ este infinită, iar o evaluare

$e : V \to \{0,1\}$ este model pentru Γ dacă şi numai dacă ia valoarea 1 pentru toate variabilele de indice par, rămânând "spaţiu de manevră" pe variabilele de indice impar. Construim bijecţia $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to Mod(\Gamma)$, prin:

$$g(A)(v_n) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ este par;} \\ 1, & \text{dacă } n \text{ este impar şi } \frac{n-1}{2} \in A; \\ 0, & \text{dacă } n \text{ este impar şi } \frac{n-1}{2} \notin A. \end{cases}$$

Cum $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ este nenumărabilă, avem că şi $Mod(\Gamma)$ este nenumărabilă. □

(P4) [1,5 puncte] Fie φ, $\psi \in Form$. Să se arate:

$$\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi.$$

Demonstraţie: Avem:

(1)	$\{\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)\}$	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	(S7.2).(iv), P. 1.42.(ii)
(2)	$\{\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)$	Prop. 1.40.(ii)
(3)	$\{\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\neg\varphi) \to ((\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \psi)$	(S7.2).(ii), P. 1.42.(ii)
(4)	$\{\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)\}$	$\vdash (\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \psi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)\}$	$\vdash \psi$	(MP): (1), (4)
(6)		$\vdash \neg(\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \psi$	T. ded. pentru (5)
(7)		$\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$	Definiţia lui "$\wedge$".

□

(P5) [2 puncte]

(i) Să se aplice algoritmul Davis-Putnam mulţimii de clauze:

$$\mathcal{S} := \{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_6\}, \{\neg v_2, v_7\}, \{\neg v_6, v_7\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_7\}\}.$$

Ce concluzie tragem?

(ii) Folosind primul subpunct şi eventual alte proprietăţi, să se arate că:

$$\{(v_0 \wedge v_1) \to v_2, v_3 \to (v_1 \vee v_4), (v_0 \wedge v_4) \to v_6, (v_2 \vee v_6) \to v_7, v_0 \to v_3\} \vDash v_0 \to v_7.$$

Demonstraţie:

(i)

$$
\begin{aligned}
& i := 1 \\
& \mathcal{S}_1 := \mathcal{S} \\
P1.1.\quad & x_1 := v_0 \\
& T_1^1 := \{\{v_0\}\} \\
& T_1^0 := \{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_6\}, \{\neg v_0, v_3\}\} \\
P1.2.\quad & U_1 := \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_6\}, \{v_3\}\} \\
P1.3.\quad & \mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_2, v_7\}, \{\neg v_6, v_7\}, \{\neg v_7\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_6\}, \{v_3\}\} \\
P1.4.\quad & i := 2;\ \text{goto } P2.1 \\
P2.1.\quad & x_2 := v_1 \\
& T_2^1 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}\} \\
& T_2^0 := \{\{\neg v_1, v_2\}\} \\
P2.2.\quad & U_2 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
P2.3.\quad & \mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_2, v_7\}, \{\neg v_6, v_7\}, \{\neg v_7\}, \{\neg v_4, v_6\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
P2.4.\quad & i := 3;\ \text{goto } P3.1 \\
P3.1.\quad & x_3 := v_2 \\
& T_3^1 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
& T_3^0 := \{\{\neg v_2, v_7\}\} \\
P3.2.\quad & U_3 := \{\{\neg v_3, v_4, v_7\}\} \\
P3.3.\quad & \mathcal{S}_4 := \{\{\neg v_6, v_7\}, \{\neg v_7\}, \{\neg v_4, v_6\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_7\}\} \\
P3.4.\quad & i := 4;\ \text{goto } P4.1 \\
P4.1.\quad & x_4 := v_3 \\
& T_4^1 := \{\{v_3\}\} \\
& T_4^0 := \{\{\neg v_3, v_4, v_7\}\} \\
P4.2.\quad & U_4 := \{\{v_4, v_7\}\} \\
P4.3.\quad & \mathcal{S}_5 := \{\{\neg v_6, v_7\}, \{\neg v_7\}, \{\neg v_4, v_6\}, \{v_4, v_7\}\} \\
P4.4.\quad & i := 5;\ \text{goto } P5.1
\end{aligned}
$$

$P5.1.$	$x_5 := v_4$
	$T_5^1 := \{\{v_4, v_7\}\}$
	$T_5^0 := \{\{\neg v_4, v_6\}\}$
$P5.2.$	$U_5 := \{\{v_6, v_7\}\}$
$P5.3.$	$\mathcal{S}_6 := \{\{\neg v_6, v_7\}, \{\neg v_7\}, \{v_6, v_7\}\}$
$P5.4.$	$i := 6$; goto $P6.1$
$P6.1.$	$x_6 := v_6$
	$T_6^1 := \{\{v_6, v_7\}\}$
	$T_6^0 := \{\{\neg v_6, v_7\}\}$
$P6.2.$	$U_6 := \{\{v_7\}\}$
$P6.3.$	$\mathcal{S}_7 := \{\{\neg v_7\}, \{v_7\}\}$
$P6.4.$	$i := 7$; goto $P7.1$
$P7.1.$	$x_7 := v_7$
	$T_7^1 := \{\{v_7\}\}$
	$T_7^0 := \{\{\neg v_7\}\}$
$P7.2.$	$U_7 := \{\square\}$
$P7.3.$	$\mathcal{S}_8 := \{\square\}$
$P7.4.$	$\square \in \mathcal{S}_8 \Rightarrow \mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

Aşadar, $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

(ii) Aplicând Propoziţia 1.30.(i), condiţia din enunţ este echivalentă cu faptul că mulţimea de formule:

$$\{(v_0 \wedge v_1) \to v_2, v_3 \to (v_1 \vee v_4), (v_0 \wedge v_4) \to v_6, (v_2 \vee v_6) \to v_7, v_0 \to v_3, \neg(v_0 \to v_7)\}$$

este nesatisfiabilă şi, mai departe, din Propoziţia 1.31.(i), cu faptul că formula:

$$((v_0 \wedge v_1) \to v_2) \wedge (v_3 \to (v_1 \vee v_4)) \wedge ((v_0 \wedge v_4) \to v_6) \wedge ((v_2 \vee v_6) \to v_7) \wedge (v_0 \to v_3) \wedge (\neg(v_0 \to v_7))$$

este nesatisfiabilă. Aplicând transformări sintactice succesive, obţinem că formula de mai sus este echivalentă, pe rând, cu:

$$(\neg(v_0 \wedge v_1) \vee v_2) \wedge (\neg v_3 \vee (v_1 \vee v_4)) \wedge (\neg(v_0 \wedge v_4) \vee v_6) \wedge (\neg(v_2 \vee v_6) \vee v_7) \wedge (\neg v_0 \vee v_3) \wedge (\neg(\neg v_0 \vee v_7)),$$

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_3 \vee v_1 \vee v_4) \wedge (\neg v_0 \vee \neg v_4 \vee v_6) \wedge ((\neg v_2 \wedge \neg v_6) \vee v_7) \wedge (\neg v_0 \vee v_3) \wedge v_0 \wedge \neg v_7)),$$

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_3 \vee v_1 \vee v_4) \wedge (\neg v_0 \vee \neg v_4 \vee v_6) \wedge (\neg v_2 \vee v_7) \wedge (\neg v_6 \vee v_7) \wedge (\neg v_0 \vee v_3) \wedge v_0 \wedge \neg v_7)),$$

ultima formulă fiind în FNC şi corespunzându-i forma clauzală:

$\mathcal{S} := \{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_6\}, \{\neg v_2, v_7\}, \{\neg v_6, v_7\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_7\}\}$,

despre care am arătat la primul punct al problemei că este nesatisfiabilă.

$\square$

(P6) [1 punct] Să se definească, folosind Principiul recursiei pe formule, funcţia Mod ce asociază fiecărei formule din logica propoziţională mulţimea modelelor sale.

Demonstraţie: Se observă că $Mod : Form \to \mathcal{P}(\{0,1\}^V)$ satisface următoarele condiţii:

$$\begin{array}{lll} (R0) & Mod(v) & = \{e : V \to \{0,1\} \mid e(v) = 1\} \\ (R1) & Mod((\neg\varphi)) & = \{0,1\}^V \setminus Mod(\varphi), \\ (R2) & Mod((\varphi \to \psi)) & = (\{0,1\}^V \setminus Mod(\varphi)) \cup Mod(\psi). \end{array}$$

Aplicăm Principiul recursiei pe formule pentru $A = \mathcal{P}(\{0,1\}^V)$ şi pentru

$$\begin{array}{rr} G_0 : V \to \{0,1\}^V, & G_0(v) = \{e : V \to \{0,1\} \mid e(v) = 1\} \\ G_\neg : \{0,1\}^V \to \{0,1\}^V, & G_\neg(A) = \{0,1\}^V \setminus A, \\ G_\to : \{0,1\}^V \times \{0,1\}^V \to \{0,1\}^V, & G_\to(A,B) = (\{0,1\}^V \setminus A) \cup B. \end{array}$$

pentru a concluziona că Mod este unica funcţie care satisface (R0), (R1) şi (R2). $\square$

(P7) [2 puncte] Să se arate că pentru orice limbaj de ordinul I $\mathcal{L}$, orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ şi orice variabilă x, avem:

(i) $\forall x\varphi \vee \forall x\psi \vDash \forall x(\varphi \vee \psi)$;

(ii) $\forall x(\varphi \to \psi) \vDash \exists x\varphi \to \exists x\psi$.

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

(i) Presupunem $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)[e]$, i.e. $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash (\forall x\psi)[e]$. Atunci, pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$. Vrem să arătăm $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \vee \psi))[e]$, i.e. că pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e_{x\leftarrow a}]$. Fie $a \in A$. Atunci, din cele anterioare, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$. Deci $\mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e_{x\leftarrow a}]$.

(ii) Presupunem $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}]$ $\iff$ pentru orice $a \in A$, dacă $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$, atunci $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$. Vrem să arătăm $\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi \to \exists x\psi)[e]$, i.e. că dacă $\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e]$, atunci $\mathcal{A} \vDash (\exists x\psi)[e]$. Presupunem $\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e]$. Atunci există $b \in A$ cu $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow b}]$. Din cele anterioare, avem $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow b}]$. Deci $\mathcal{A} \vDash (\exists x\psi)[e]$, ceea ce trebuia arătat.

□

(P8) [1,5 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I ce conţine cel puţin un simbol de relaţie unar P şi o constantă c. Să se arate:

$$\models (\forall v_0 P(v_0)) \to P(c).$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o evaluare. Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \models ((\forall v_0 P(v_0)) \to P(c))[e]$, i.e. că $(\forall v_0 P(v_0))^{\mathcal{A}}(e) \to (P(c))^{\mathcal{A}}(e) = 1$.
Presupunem că $(\forall v_0 P(v_0))^{\mathcal{A}}(e) = 1$ şi cercetăm dacă şi $(P(c))^{\mathcal{A}}(e) = 1$. Din faptul că $(\forall v_0 P(v_0))^{\mathcal{A}}(e) = 1$, avem că pentru orice $a \in A$, $(P(v_0))^{\mathcal{A}}(e_{v_0 \leftarrow a}) = 1$, deci pentru orice $a \in A$, $e_{v_0 \leftarrow a}(v_0) \in P^{\mathcal{A}}$, i.e. $a \in P^{\mathcal{A}}$. În particular, $c^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$, deci $(P(c))^{\mathcal{A}}(e) = 1$. □

(P9) [2 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I şi φ un $\mathcal{L}$-enunţ ce este satisfăcut de orice $\mathcal{L}$-structură infinită. Să se arate că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât orice $\mathcal{L}$-structură ce conţine mai mult de k elemente satisface φ.

Demonstraţie: Presupunem prin absurd contrariul: pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există o $\mathcal{L}$-structură cu mai mult de k elemente ce nu satisface φ, i.e. satisface $\neg\varphi$. Aplicând (S14.3), există o $\mathcal{L}$-structură infinită ce satisface $\neg\varphi$, i.e. nu satisface φ. Aceasta contrazice ipoteza.
□