FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Examen

(P1) [1 punct] Fie funcţia $J : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ ce verifică, pentru orice $x, y, z \in \{0,1\}$:

$$J(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y \cdot z.$$

Să se obţină o formulă a logicii propoziţionale φ în FNC astfel încât $J = F_\varphi$.

(P2) [2 puncte] Fie $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$, definite, pentru orice $i \in \mathbb{N}$, prin:

$$e_1(v_i) = 1 \Leftrightarrow i \text{ este prim},$$

$$e_2(v_i) = 1 \Leftrightarrow i \text{ este par}.$$

Să se găsească $\Gamma \subseteq Form$ astfel încât $Mod(\Gamma) = \{e_1, e_2\}$.

(P3) [2 puncte] Să se ofere un exemplu justificat de mulţime infinită de formule din logica propoziţională a cărei mulţime de modele să fie nenumărabilă.

(P4) [1,5 puncte] Fie φ, $\psi \in Form$. Să se arate:

$$\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi.$$

(P5) [2 puncte]

(i) Să se aplice algoritmul Davis-Putnam mulţimii de clauze:

$$\mathcal{S} := \{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_6\}, \{\neg v_2, v_7\}, \{\neg v_6, v_7\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_7\}\}.$$

Ce concluzie tragem?

(ii) Folosind primul subpunct şi eventual alte proprietăţi, să se arate că:

$$\{(v_0 \wedge v_1) \to v_2, v_3 \to (v_1 \vee v_4), (v_0 \wedge v_4) \to v_6, (v_2 \vee v_6) \to v_7, v_0 \to v_3\} \vDash v_0 \to v_7.$$

(P6) [1 punct] Să se definească, folosind Principiul recursiei pe formule, funcţia Mod ce asociază fiecărei formule din logica propoziţională mulţimea modelelor sale.

(P7) [2 puncte] Să se arate că pentru orice limbaj de ordinul I $\mathcal{L}$, orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ şi orice variabilă x, avem:

(i) $\forall x\varphi \vee \forall x\psi \vDash \forall x(\varphi \vee \psi)$;

(ii) $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \vDash \exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi$.

(P8) [1,5 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I ce conţine cel puţin un simbol de relaţie unar P şi o constantă c. Să se arate:

$$\vDash (\forall v_0 P(v_0)) \rightarrow P(c).$$

(P9) [2 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I şi φ un $\mathcal{L}$-enunţ ce este satisfăcut de orice $\mathcal{L}$-structură infinită. Să se arate că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât orice $\mathcal{L}$-structură ce conţine mai mult de k elemente satisface φ.